ニュートン法
(ニュートン・ラフソン法)

明治大学 理工学部 応用化学科
データ化学工学研究室　金子 弘昌

ニュートン法 (ニュートン・ラフソン法) とは？

✓非線形方程式 $f(x) = 0$ を数値的に解く方法の１つ

✓微分可能な方程式であれば、たとえ微分しなくても解が求まる

✓繰り返し計算により解に近づく

✓初期値を変えて何回か解く方がよい

問題設定

非線形方程式 $f(x) = 0$ の解 x を求める

曲線 $y = f(x)$ における、$y = 0$ のときの x を求める

方針

✓曲線上のある点 (x_k, $f(x_k)$) に接する直線を考える

✓その直線と $y = 0$ との交点を (x_{k+1}, 0) とすると、

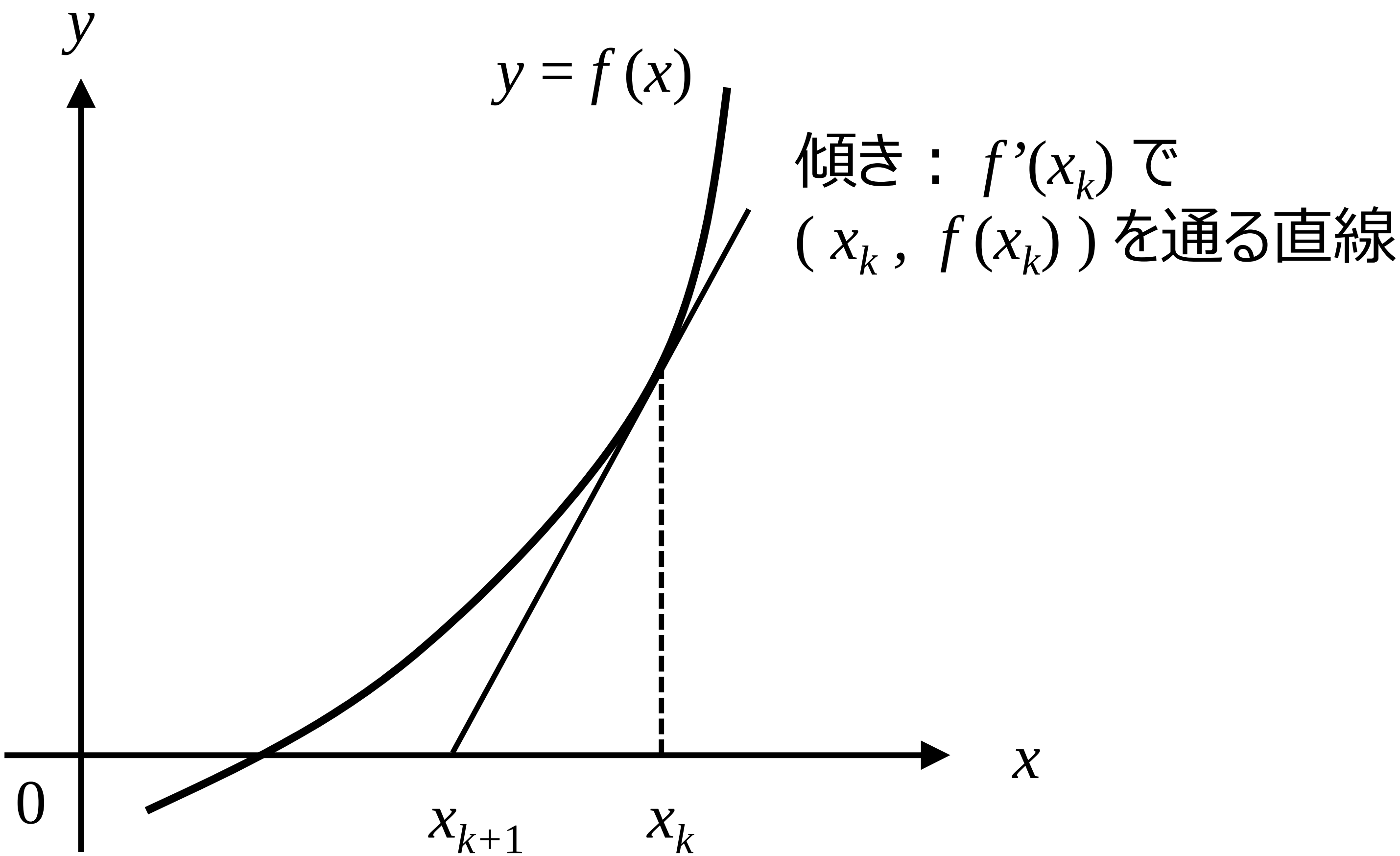
x_{k+1} は x_k より $f(x) = 0$ の解に近づく

⇩

接線の計算と y=0 との交点の計算とを繰り返すことで、

$y = f(x)$ における、$y = 0$ のときの x に近づいていく

図解



x_{k+1} を求める

傾き： $f'(x_k)$ で (x_k , $f(x_k)$) を通る直線は？

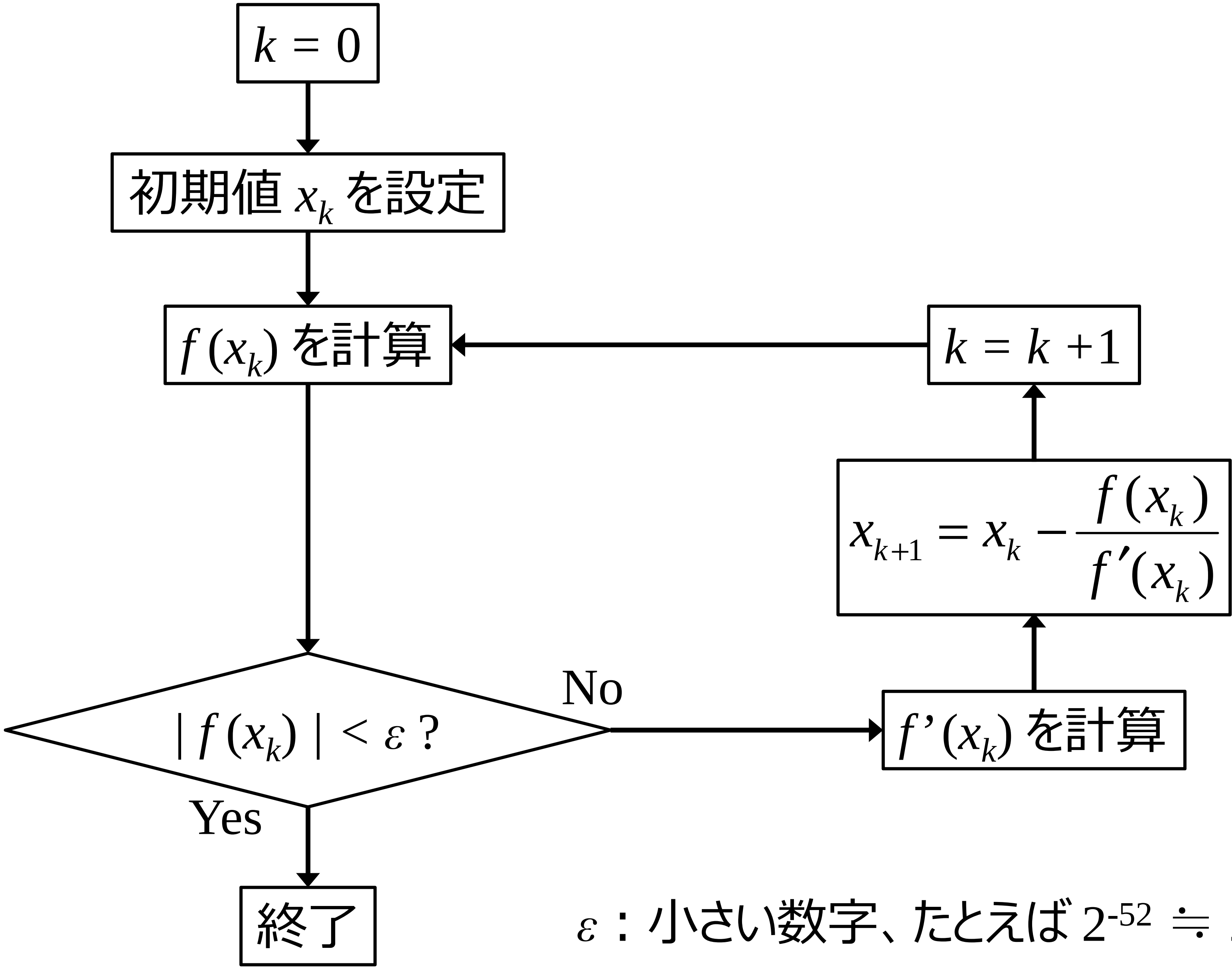
$$y = f'(x_k)\left(x - x_k\right) + f(x_k)$$

この直線の x 切片 (y = 0 のときの x) x_{k+1} は？

$$0 = f'(x_k)\left(x_{k+1} - x_k\right) + f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

アルゴリズム



ε：小さい数字、たとえば $2^{-52} \fallingdotseq 2.22\times10^{-16}$

$f'(x_k)$ の求め方 (2 通り)

✓① $y = f(x)$ を x で微分して、x_k を代入する

- $y = f(x)$ を x で簡単に微分できるとき、こちらの方が手っ取り早い

✓② x_k 付近の微小区間 (たとえば、$x_k - 10^{-10}$〜 $x_k + 10^{-10}$) で傾きを計算する

- $y = f(x)$ を x で微分するのが難しいときでも求めることができる

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k + 10^{-10}) - f(x_k - 10^{-10})}{2 \times 10^{-10}}$$

注意点

✓$f(x) = 0$ の解が複数存在するときもある

✓計算が収束しないときもある

⇩

初期値 x_0 を変えて何度か計算するとよい